# Haciendo realidad las raíces imaginarias

¿Cómo podemos dar sentido a lo que aprendimos hoy?» Esta es una pregunta que suelo hacerle a mis alumnos de álgebra para que reflexionen sobre las conexiones entre el nuevo concepto que están aprendiendo y los conceptos que han aprendido previamente. Para los alumnos que tienen una comprensión sólida y expansiva de los temas aprendidos previamente, determinar cómo «dar sentido» a los nuevos conceptos puede ser relativamente sencillo. Sin embargo, para los alumnos que tienen una comprensión limitada de los conceptos fundamentales, el «dar sentido» al nuevo material puede no ser tan simple.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) define el hecho de dar sentido como «desarrollar la comprensión de una situación, contexto o concepto al conectarla con los conocimientos existentes» (Martin et al. 2009, p. 4). Al darles la oportunidad a los alumnos de que se involucren en el proceso de dar sentido a los de los conceptos matemáticos se les permite ampliar su comprensión mediante el análisis de la relación entre las diferentes ideas matemáticas, para luego poder usar las matemáticas de manera flexible como una herramienta para razonar y resolver diversos problemas. Es fundamental darle sentido a los conceptos para determinar el significado de los problemas e identificar los puntos de entrada apropiados (CCSSI 2010); por tanto, es un aspecto crítico de la comprensión matemática de los alumnos que debe estar estrechamente ligado a todos los programas de la escuela secundaria (Martin et al. 2009).

A medida que se cultivan las habilidades de los alumnos para dar sentido a los conceptos, cada clase de alumnos navega por su propio y único camino para intentar «dar sentido» individual y colectivamente a las matemáticas que están apren-

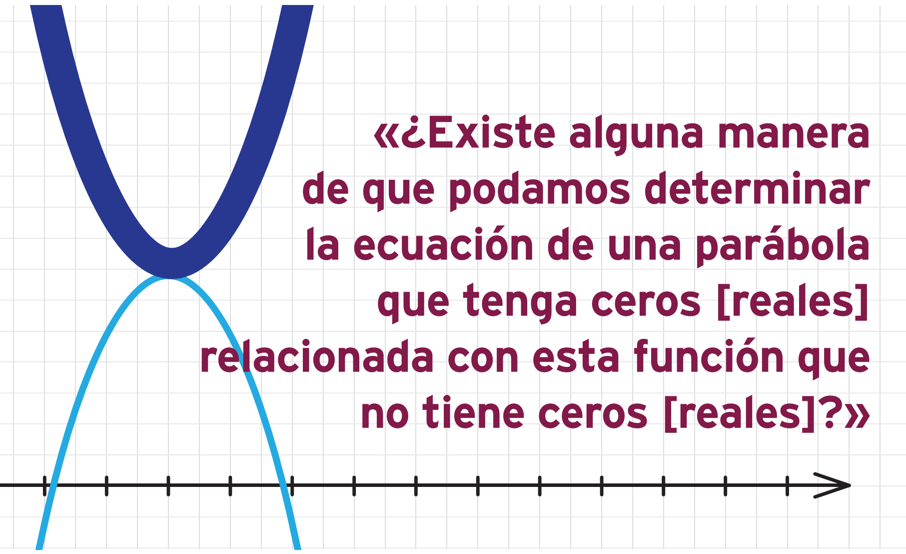
Los alumnos de una clase de álgebra de nivel básico intentan entender la relación entre los ceros imaginarios y sus equivalentes no imaginarios.

**Natasha T. K. Murray**

diendo. Al apoyar a los alumnos en sus esfuerzos por dar sentido a los conceptos, es fundamental que los profesores tengan en cuenta que la capacidad de los alumnos para hacerlo dependerá de la medida en que puedan conectar su aprendizaje con sus *conocimientos existentes.* Por lo tanto, a medida que los alumnos lidian con dar sentido a los nuevos conocimientos, es importante que fortalezcan sus conocimientos fundamentales que servirán como *conocimientos existentes* sobre los que pueden construir nuevos conceptos. En este artículo, comparto el proceso de algunos de mis alumnos de álgebra cuando intentaron «dar sentido» a los ceros imaginarios a través de sus conocimientos existentes de los ceros reales.

## CONTEXTO DEL AULA

Mis clases de álgebra de primer año estaban conformadas por grupos de alumnos heterogéneos con respecto a su origen étnico, género y nivel de ingresos. Con un tamaño promedio de clase de 32 alumnos, estas clases también incluyeron alumnos con diferentes niveles de habilidad e interés; algunos alumnos se enfrentaron pronto a problemas matemáticos complicados; otros tuvieron dificultades continuas con los conceptos algebraicos fundamentales. En el momento del año académico en que los alumnos se enfrentaron a funciones cuadráticas sin ceros reales, la mayoría fueron capaces de calcular los ceros de una función cuadrática utilizando múltiples métodos, incluida la fórmula cuadrática. Pudieron calcular los ceros no integrales de una función al observar su gráfica. También pudieron determinar cómo queda gráficamente afectada una función cuando se traduce añadiendo una constante a la variable $x$ o $y$. Sin embargo, no estaban familiarizados con los números imaginarios porque en el currículo que seguimos los números complejos se introducen en el álgebra de segundo año.



**«¿Existe alguna manera de que podamos determinar la ecuación de una parábola que tenga ceros [reales] relacionada con esta función que no tiene ceros [reales]?»**

## AMPLIANDO UNA TAREA DE CLASE

Durante una de las tareas en clase, proporcioné a los alumnos varias funciones cuadráticas en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, cada una de los cuales tenía ceros reales. Mientras trabajaban con sus compañeros en pequeños grupos, los alumnos identificaron algunas de las características de cada función cuadrática y su gráfica (por ejemplo, eje de simetría, vértice y ceros), representaron gráficamente cada una de ellas, exploraron cómo cada característica anterior se relacionaba con la gráfica de función respectiva, identificaron las similitudes y diferencias entre las funciones dadas y debatieron cómo el hecho de traducir una función añadiendo una constante a la variable $x$ o $y$ afectaba a la gráfica y la ecuación de cada función. Durante sus charlas, me uní a cada grupo durante unos minutos para evaluar su comprensión de las matemáticas y para impulsar su razonamiento. Ya sea por su cuenta o con mi apoyo, pudieron identificar los ejes de simetría, vértices y ceros de las funciones; la mayoría de los alumnos también pudieron discernir cómo los cambios en el valor de $a$, $b$, o $c$ de cada cuadrática afectaron a su gráfica, raíces, ejes de simetría y vértice.

Después de una breve puesta en común de toda la clase, presenté a los alumnos la siguiente ecuación cuadrática: $f(x) = x^2 - 6x + 13$. Como parte de la tarea, los alumnos debían crear la gráfica de la función y determinar sus características significativas como anteriormente. Todos los alumnos determinaron, basándose en la gráfica, que la función no tenía ningún cero (real). Los métodos de los alumnos para justificar sus respuestas, sin embargo, fueron variados; muchos intentaron usar la fórmula cuadrática para respaldar su respuesta. En el pasado, cuando utilizaron la fórmula cuadrática para determinar los ceros de problemas similares, les sorprendió la presencia de radicandos negativos en sus cálculos. Les expliqué que aprenderían más sobre estos tipos de ceros en el álgebra de segundo año. Para este problema, cuando los alumnos concluyeron que

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

explicaron que, al no existir un valor (real) equivalente para $\sqrt{-16}$, esto significaba que ningún valor (real) de $x$ haría que $f(x) = 0$ y, por lo tanto, esto respaldaba su conclusión de que la función no tenía ningún cero (real). En general, la clase estuvo de acuerdo en que esta era una explicación aceptable. Una alumna, sin embargo, se sintió incómoda con la rotundidad de esa explicación. Fiona (todos los nombres de los alumnos son seudónimos) comentó que, aunque entendía que no había ceros (reales), quería «dar sentido» al valor obtenido para $x$ en relación con la función específica y su gráfica. En otras palabras, quería entender cómo las raíces de $f(x) = x^2 - 6x + 13 = 0$ eran específicas para esta función cuadrática y diferentes de una cuadrática cuyas raíces fueran, por ejemplo,

$$-5 \pm \sqrt{6}.$$

Aunque entendía cómo calcular la respuesta numérica, le parecía arbitraria y no se conectaba con su conocimiento de los ceros previamente desarrollado. Varios alumnos estuvieron de acuerdo. No tuvimos tiempo durante esa lección para abordar la pregunta de Fiona, así que trabajé con ella y otros seis alumnos interesados al día siguiente intentando dar sentido a los ceros imaginarios para esta función.

## RELACIONANDO LOS CEROS IMAGINARIOS CON LOS CEROS REALES

Antes de trabajar con el grupo más pequeño de siete alumnos al día siguiente, me preocupaba que sus «conocimientos existentes» no fueran lo suficientemente sólidos como para que pudieran darle sentido a los ceros complejos con valores imaginarios distintos de cero. Los alumnos no tenían una noción previa de números imaginarios ni habían aprendido a calcular con ellos. Además, como estaban en una clase de álgebra de primer año, rara vez se encontraban con funciones cuadráticas sin ceros reales. Apoyé completamente sus esfuerzos para ver una raíz imaginaria como un valor que no era arbitrario, ya que esto podría ayudarles a avanzar en el proceso de dar sentido a los ceros complejos.

Volviendo a la función original, $f(x) = x^2 - 6x + 13$, les dije a los alumnos que iban a determinar si había una relación entre $f(x)$ y otra función con la que estaban más familiarizados, una función con ceros reales. Les pregunté a los alumnos sobre los tipos de funciones con las que estaban familiarizados a la hora de hacer sus gráficas. Presentaron y bosquejaron ejemplos de funciones con dos ceros y un cero. También distinguieron entre una función con un valor de «*a*» positivo cuya gráfica es como una parábola que «parece una ‘U’» y una función con un valor de «*a*» negativo cuya gráfica es como una parábola que «parece una ‘U’ boca abajo». Cuando pregunté: «¿Por qué es importante el signo del valor de “*a*”?» respondieron que el valor de «a» determina la dirección de la parábola; «se da la vuelta» por el inverso aditivo del valor de «*a*».

Mientras los alumnos dibujaban una gráfica de *f*, de manera individual, yo también la dibujé en la pizarra. Pregunté: «¿En qué se diferencia esta función de las que normalmente vemos en clase?» Afirmaron que la parábola no se cruza con el eje *x* y, por lo tanto, «no tiene raíces [reales]».

Entonces pregunté: «¿Existe alguna manera de que podamos determinar la ecuación de una parábola que tenga ceros [reales] relacionada con esta función que no tiene ceros [reales]?» Cuando los alumnos comenzaron a debatirlo, determinaron que la parábola relacionada tendría que intersecar el eje *x* para tener ceros. Y, para que la parábola se interseque con el eje *x* tendrían que «darle la vuelta». Les pregunté: «¿Cómo podríamos “darle la vuelta”?»

Fiona dijo que el «valor de “*a*” tendría que ser negativo».

A medida que los alumnos continuaron su debate, cinco de ellos decidieron encontrar el inverso aditivo de los valores «*a*», «*b*» y «*c*» de $f(x)$ porque «necesitamos un valor negativo para a». Luego, hicieron la gráfica de su nueva ecuación, $g(x) = -x^2 + 6x - 13$, en la misma gráfica que la ecuación original. Se dieron cuenta de que, aunque

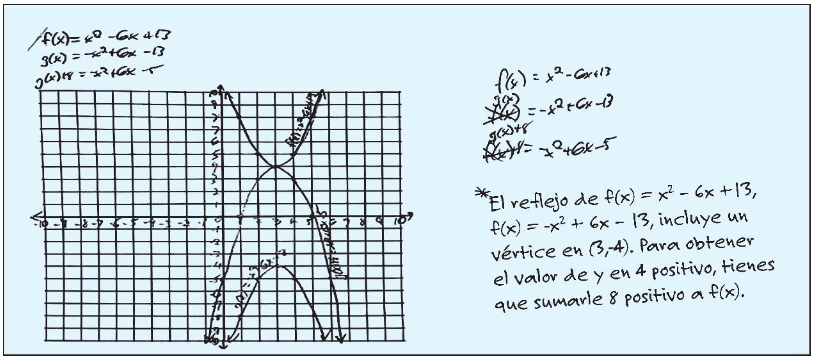



**Fig. 1** Omari explicó cómo había determinado la ecuación para *g(x)* + 8.

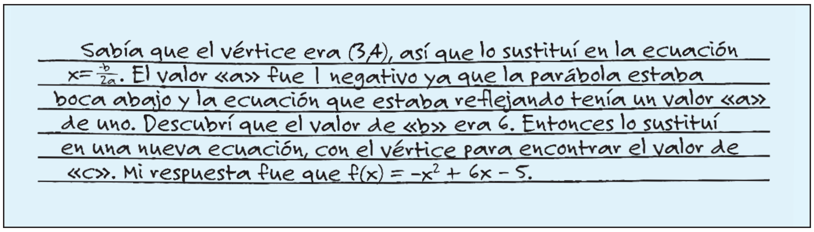



**Fig. 2** Evelyn determinó la ecuación de la función usando un método diferente.

la parábola estaba «del revés», esto no resolvía su problema inicial de garantizar que se intersecaría con el eje *x*. Los alenté a continuar: «Bueno, no funcionó exactamente como esperábamos, pero vais por buen camino. ¿Hay algo más que podamos hacer para determinar una función relacionada que pudiera representase con una parábola “del revés” que tenga ceros reales?»

Después de unos momentos, Omari dijo que la parábola original y la parábola «del revés» aún podrían estar relacionadas si compartían el mismo vértice. Pregunté al resto de los alumnos si estaban de acuerdo con él; dijeron que sí. Dado que estaban de acuerdo con Omari, les pedí que determinaran la ecuación de la parábola de la función que satisfacía estas condiciones.

Algunos alumnos decidieron reflejar la parábola sobre el eje *x* y luego traducir la función reflejada para obtener una parábola con sus condiciones deseadas. Omari utilizó un enfoque similar al de algunos de sus compañeros de clase (ver **fig. 1**). En la explicación de Omari, aunque se refirió a la ecuación de la imagen reflejada como $f(x)$, que indicó como $g(x)$ en el resto de su trabajo, explicó cómo llegó a la ecuación para la función que comparte el mismo vértice con *f* pero tiene ceros reales.

Dos alumnos determinaron la ecuación de la función relacionada utilizando un método diferente. Evelyn decidió no encontrar la parábola de la imagen reflejada sobre el eje *x*. En su lugar, usó la ecuación del eje de simetría para determinar el valor de «b» en la nueva ecuación. Como ya dedujo que el valor de «*a*» sería −1, usó los valores de *x* e *y* del vértice de la ecuación original para determi-

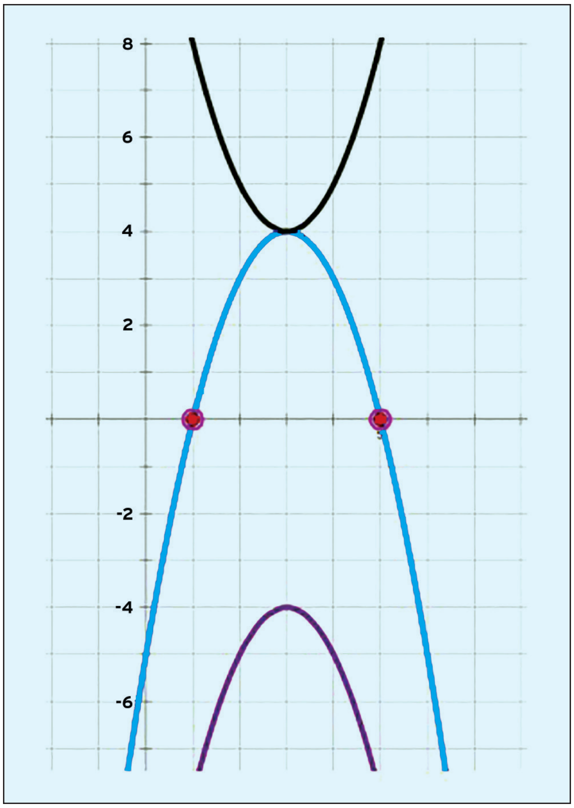



**Fig. 3** La parábola negra representa *f(x)*, la parábola granate representa *g(x)*, y la parábola azul representa *g(x)* + 8 con sus ceros.

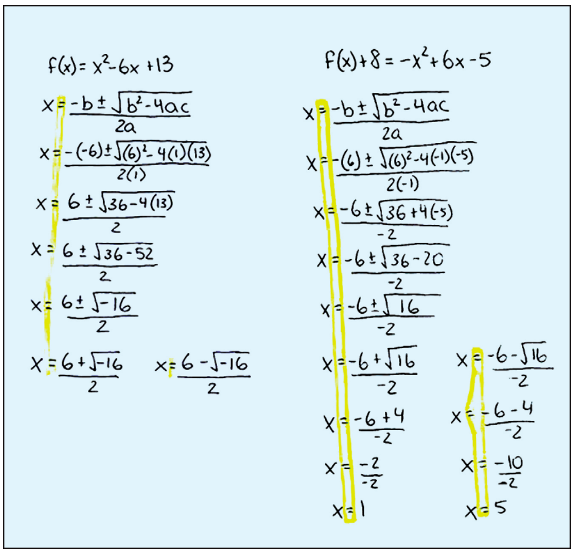



**Fig. 4** Los cálculos de Alexis permitieron a otros alumnos ver la relación entre *f(x)* y *g(x)* + 8.

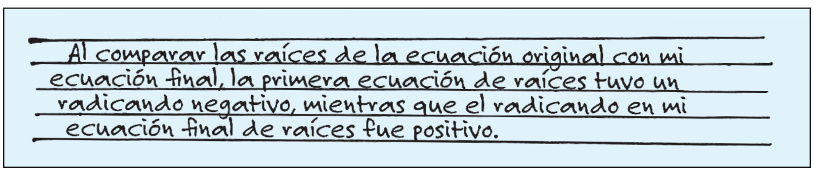



**Fig. 5** Fiona se dio cuenta de la diferencia entre los radicandos de *f(x)* y de *g(x)* + 8.

nar el valor de «*c*» de la nueva ecuación a la que se refirió como $f(x)$ (ver **fig. 2**).

Aunque los alumnos determinaron la ecuación de la nueva función usando diferentes métodos, a partir de ahora me referiré a las ecuaciones usando la notación de Omari: $f(x) = x^2 - 6x + 13$ como la función original, $g(x) = -x^2 + 6x - 13$ como la función reflejada sobre el eje $x$, y $g(x) + 8 = -x^2 + 6x - 5$ como la traducción de la parábola reflejada que comparte el mismo vértice con $f(x)$ (ver **fig. 3**).

Después de que los alumnos compartieran cómo habían llegado a la ecuación para $g(x) + 8$, les dije que determinaran sus ceros para que pudieran decidir si estaban relacionados con los de $f(x)$. Los alumnos usaron la fórmula cuadrática para determinar $\{1,5\}$ como los ceros. Durante su debate, varios alumnos declararon que no veían una relación entre los ceros de $f(x)$ y de $g(x) + 8$; empezaron a debatir si una parábola relacionada diferente sería más adecuada para esta exploración. Les dije que no podían ver fácilmente la relación porque aún no habían aprendido formalmente a trabajar con radicandos negativos. Dos alumnos, sin embargo, pudieron identificar que los ceros no reales de $f(x)$ estaban relacionados con los ceros reales de $g(x) + 8$. Antes de que los dos alumnos compartieran la relación que habían identificado, mostré a todo el grupo cómo Alexis había calculado los ceros de $f(x)$ al lado de sus cálculos para los ceros de $g(x) + 8$ para que otros alumnos tuvieran la oportunidad de determinar si existía una relación. Aunque Alexis se refirió incorrectamente a la función relacionada como $f(x) + 8$, sus cálculos estaban estructurados de manera que permitieron a sus compañeros identificar la relación en la sexta línea de sus cálculos para cada función (ver **fig. 4**).

La falta de familiaridad de los alumnos con los números imaginarios les impidió poder comparar los ceros de $f(x)$, $3 \pm 2$, con los de $g(x) + 8$, $3 \pm 2i$. Habría sido mejor si el cálculo del cero real se hubiera retrasado para permitir a los alumnos ver los ceros imaginarios y los reales de forma paralela como, respectivamente,

$$x = 3 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} \text{and } x = 3 \pm \frac{\sqrt{16}}{2}.$$

El trabajo de Alexis les permitió ver la relación entre el radicando en ambas funciones al comparar los pasos respectivos en la fórmula cuadrática (ver **fig. 5**). En su debate sobre cómo podrían darle sentido a lo que habían aprendido, los alumnos determinaron que, aunque en esta etapa no entendían completamente los ceros complejos, sí tenían capacidad para conectar un cero no real con un cero real relacionado, lo que les permitió fortalecer la base de sus conocimientos existentes y darle sentido a los ceros imaginarios en el futuro.

**Ahora tienen una experiencia adicional sobre la que pueden construir para dar sentido a estos conceptos en el futuro.**

YULI4KA/THINKSTOCK

## PREPARÁNDONOS PARA DAR SENTIDO A LOS CONCEPTOS

A través de esta exploración, los alumnos pudieron identificar una relación entre los ceros complejos de una función y los ceros reales de otra función reflejada sobre su vértice. También pudieron determinar que los ceros complejos no son arbitrarios y que los números complejos tendrán sentido cuando estudien matemáticas en clases posteriores. El apoyo a la expansión de la comprensión matemática de los alumnos que servirá de base a las clases de matemáticas de nivel superior les proporciona los conocimientos existentes que necesitarán para «dar sentido» a esos conceptos.

A medida que los alumnos continúen explorando estas ideas, podrán comprender las raíces imaginarias de una manera más significativa y codificada. «A medida que se desarrolla el proceso de dar sentido a los conceptos, se incorporan cada vez más elementos formales» (Martin et al. 2009, p. 4). Cuando los alumnos aprendan formas más estructuradas de hablar de números complejos con partes imaginarias distintas de cero, podrán desarrollar una comprensión más sólida de la relación entre raíces imaginarias o ceros imaginarios expresados en una forma $a \pm bi$ y cómo se relacionan con las raíces o ceros de la parábola reflejada sobre la línea $y = k$, donde $(h, k)$ es el vértice. También podrán determinar la ecuación de la función relacionada que tiene raíces reales basándose en lo que aprendieron y exploraron en el álgebra de primer año. Si la cuadrática se representa en forma de vértice como $f(x) = a(x - h)^2 + k$, entonces la ecuación de la función relacionada será $g(x) + 2k = -(ax^2 + bx + c) + 2k$ o $g(x) + 2k = -f(x) + 2k$.

## CONCLUSIÓN

Dar sentido a los ceros no reales puede ser un reto para los alumnos, especialmente si no tienen conocimientos existentes sólidos con que conectar estas nuevas ideas. No esperaba que mis alumnos le dieran sentido a los ceros no reales o los números imaginarios en una clase de álgebra básica. Sin embargo, ahora tienen una experiencia adicional sobre la que pueden construir para dar sentido a estos conceptos en el futuro. Así es como los alumnos pueden comenzar a comprender que los números que «no son reales» aún siguen teniendo un valor matemático «real».

## BIBLIOGRAFÍA


Common Core State Standards Initiative (CCSSI). 2010. Common Core State Standards for Mathematics. Washington DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Martin, W. Gary, John Carter, Susan Forster, Roger Howe, Gary Kader, Henry Kepner, Judith Reed Quander, William McCallum, Eric Robinson, Vincent Snipes, y Patricia Valdez. 2009. Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nebesniak, Amy L., y A. Aaron Burgoa. 2015. "Developing the Vertex Formula Meaningfully." Mathematics Teacher 108, n.º 6 (febrero): 429–33.



**NATASHA MURRAY,** Dr.TKMurray@gmail.com, ha desempeñado funciones de educadora de matemáticas, educadora de maestros, administradora, profesora adjunta, investigadora, desarrolladora profesional y consultora en el estado de Nueva York y alrededores. Sus intereses incluyen fortalecer la relación bidireccional entre la práctica y la teoría, explorar cómo la intersección de las identidades de los alumnos afecta la forma en que aprenden matemáticas en entornos formales e informales y participar en diversas formas de formación docente.